Entwicklung einer physikalischen Geometrie der Raum-Zeit zum Zwecke der Interpretation der allgemeinen Relativitätstheorie

Von Ernst Schmutzer

Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität Jena

(Z. Naturforschg. **19 a**, 665—675 [1964]; eingegangen am 2. Januar 1964)

Up to date the interpretation of the theory of general relativity is discussed. One cause for this situation is the use of mathematical coordinates without physical meaning. In continuation of thoughts of Møller and Cattaneo here physical coordinates are used and on this basis a 4-dimensional physical geometry of space-time is developed by projection the mathematical tensor components into physical components. For studying the curvature of the 3-dimensional physical space and for other purposes new socalled projective partial and projective covariant derivations are introduced. On this foundation Einstein's equation of motion is investigated. Definitions for the Coriolis acceleration and the centrifugal-gravitational acceleration for a fixed system of reference are given. The problem of energy conservation is analysed.

§ 1. Allgemeine Gesichtspunkte

Møller [1] hat den Begriff des physikalischen Bezugssystems besonders klar herausgearbeitet und damit die Anregung zu einer Reihe neuer Untersuchungen auf dem Gebiet der allgemeinen Relativitätstheorie gegeben. Danach schöpft die Untergruppe der Gruppe der beliebigen Koordinatentransformationen, definiert durch

$$x^{m'} = x^{m'}(x^n), \qquad x^{4'} = x^{4'}(x^m, x^4), \tag{1}$$

woraus die Beziehungen

$$A_4^{m'} = 0, A_{4'}^{m} = 0,$$
$$A_n^{m'} A_{k'}^{n} = g_{k'}^{m'} = \delta_{k'}^{m'}, A_4^{4'} A_{4'}^{4} = 1 \left(A_n^{m'} = \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^n} \right) \tag{2}$$

folgen, alle innerhalb eines Bezugssystems möglichen Koordinatentransformationen aus, ohne daß dadurch der Bewegungszustand des Bezugssystems verändert wird. Der Kürze halber wollen wir deshalb diese Untergruppe bezugsinvariante Transformationsgruppe nennen. (Griechische Indizes laufen von 1 bis 4, lateinische von 1 – 3, die Signatur der Raum-Zeit sei +, +, +, –.)

Mit den durch die Herausstellung dieser bezugsinvarianten Transformationsgruppe verbundenen Problemen haben sich mehrere Forscher beschäftigt. Lichnerowicz [2] hat unter Verwendung anholonomer lokal angehefteter Galileischer Koordinaten mehr mathematische Aspekte untersucht, während Cattaneo [3] physikalisch an die Møllerschen Ideen angeknüpft, einen umfangreichen Projektionsapparat entwickelt und vorwiegend die Geometrie des 3-dimensionalen Ortsraumes als Unterraum der Raum-Zeit erforscht hat.

Ihm ist auch die konsequente Benutzung der physikalischen Zeit in den Bewegungsgleichungen zu verdanken. Die Analyse von Cattaneo wurde in letzter Zeit von Salié [4] noch etwas weiter verfolgt, der versuchte, mittels des Basisvektorkalküls den 3-dimensionalen Koordinatenraum als Unterraum der Raum-Zeit abzuspalten. Damit wurden auch die Maxwellschen Gleichungen physikalisch zerlegt.

Parallel dazu liefen offenbar die Untersuchungen von Hönl [5], Dehnen [6] und Anderen, die sich ebenfalls mit der Aufspaltung von Feld- und Bewegungsgleichungen beschäftigt haben. Insbesondere wurde von diesen Autoren die Zerlegung der Einsteinschen Gravitationsgleichungen teilweise durchgeführt, wobei sich gewisse Analogien zur Struktur der Maxwell-Gleichungen ergaben. Es ist nicht möglich, mit wenigen Worten genauer die Differenzen im Vorgehen der verschiedenen Forscher zu charakterisie-

[1] C. Møller, The Theory of Relativity, At the Clarendon Press, Oxford 1955.

[2] A. Lichnerowicz, Théories relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme, Masson & Cie. Editeurs, Paris 1955.

[3] C. Cattaneo, Nuovo Cim. **10**, 318 [1958]; Ann. di mat. pura e appl. **48**, 361 [1959]; Rendiconti Mat. **20**, 18 [1961]; **21**, 373 [1962].

[4] N. Salié, Dissertation, Jena 1964.

[5] H. Hönl u. H. Dehnen, Ann. Phys., Lpz. **11**, 201 [1963].

[6] H. Dehnen, Z. Phys. **166**, 559 [1962].

ren, da sich dazu eine eingehende Darlegung ihrer Arbeiten als notwendig erweisen würde. Ziel unserer folgenden Untersuchungen ist es, durch eine summarische 4-dimensionale geometrische Studie der Aufspaltung der Raum-Zeit in den 3-dimensionalen physikalischen Ortsraum und die darauf senkrecht stehende physikalische Zeit sowie durch Entwicklung der geometrischen Übertragungsrelationen eine physikalische Geometrie der Raum-Zeit zu schaffen, die für die physikalische Interpretation die Grundlage bilden soll. Was den 3-dimensionalen Ortsraum betrifft, werden wir dabei im wesentlichen auf die Resultate von CATTANEO geführt. Zur Darstellung unseres geometrischen Apparates benutzen wir teilweise den von uns oft angewandten Basisvektorkalkül, mit dessen Hilfe sich auch eine gute Veranschaulichung erzielen läßt.

Von außerordentlicher Wichtigkeit erweist sich die im allgemeinen nichtintegrable differentielle Koordinatentransformation

$$d\bar{x}^m = dx^m, \quad d\bar{x}^4 = dx^4 + \frac{g_{4m}}{g_{44}}\, dx^m = \frac{g_{4\mu}}{g_{44}}\, dx^\mu, \tag{3}$$

die die vorgegebenen Basisvektoren $\mathfrak{e}_\mu$ in die neuen Basisvektoren

$$\bar{\mathfrak{e}}_m = \mathfrak{e}_m - \frac{g_{4m}}{g_{44}}\,\mathfrak{e}_4\,, \quad \bar{\mathfrak{e}}_4 = \mathfrak{e}_4\,, \bar{\mathfrak{e}}^m = \mathfrak{e}^m, \quad \bar{\mathfrak{e}}^4 = \mathfrak{e}^4 + \frac{g_{4m}}{g_{44}}\,\mathfrak{e}^m \tag{4}$$

überführt und aus dem vorgegebenen metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ den neuen metrischen Tensor

$$\bar{g}_{mn} = g_{mn} - \frac{g_{4m}\,g_{4n}}{g_{44}}\,, \; \bar{g}_{4m} = 0\,, \quad \bar{g}_{44} = g_{44}\,, \quad \bar{g}^n_m = g^n_m\,,$$
$$\bar{g}^4_m = 0\,, \; \bar{g}^m_4 = 0\,, \bar{g}^{mn} = g^{mn}\,,$$
$$\bar{g}^{m4} = 0\,, \; \bar{g}^{44} = g^{44} + \frac{g_{4m}g^{4m}}{g_{44}} = \frac{1}{g_{44}} \tag{5}$$

erzeugt. Die physikalische Bedeutung dieser neuen Basisvektoren besteht darin, daß die drei räumlichen infinitesimal einen räumlichen Unterraum der Raum-Zeit aufspannen, den wir als physikalischen Ortsraum ansprechen wollen, da in ihm ein sinnvoller physikalischer Abstandsbegriff und Zeitbegriff definierbar ist. Allerdings wird diese Begriffsbildung wegen der im allgemeinen vorliegenden Nichtintegrabilität der Koordinatentransformationen (3) nur im Infinitesimalen ermöglicht. Das ist ein besonderes Kennzeichen der Situation in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Die Transformation (3) ist eine bezugsinvariante Transformation, denn sie erfüllt die Beziehungen (2). Nachdem wir auf diese Weise die quergestrichenen Größen erhalten haben, sehen wir diese als selbständige Gebilde an, die wir stets aus den vorgegebenen geometrischen Größen konstruieren können. Wir vergessen also gewissermaßen, daß wir sie durch eine Transformation erhalten haben. Diese Verselbständigung der quergestrichenen Größen wird durch deren Transformationsverhalten gegenüber bezugsinvarianten Transformationen deutlich unterstrichen. Damit wollen wir uns nun etwas näher beschäftigen. Aus den Transformationsformeln gegenüber bezugsinvarianten Transformationen, auf die wir uns fortan beschränken wollen, nämlich aus

$$\mathfrak{e}^{m'} = A^{m'}_m \mathfrak{e}^m, \mathfrak{e}^{4'} = A^{4'}_4 \mathfrak{e}^4, \mathfrak{e}_{m'} = A^m_{m'} \mathfrak{e}_m, \mathfrak{e}_{4'} = A^4_{4'}\,\mathfrak{e}_4 \tag{6}$$

und

$$\bar{g}^{a'b'} = A^{a'}_a A^{b'}_b \bar{g}^{ab}, \bar{g}^{a'4'} = A^{a'}_a A^{4'}_4 \bar{g}^{a4}, \bar{g}^{4'4'} = (A^{4'}_4)^2\, \bar{g}^{44},$$
$$\bar{g}_{a'b'} = A^a_{a'} A^b_{b'} \bar{g}_{ab}, \bar{g}_{a'4'} = A^a_{a'} A^4_{4'} \bar{g}_{a4}, \bar{g}_{4'4'} = (A^4_{4'})^2 \bar{g}_{44},$$
$$\bar{g}^{a'}_{b'} = \bar{g}^a_b, \bar{g}^{4'}_{4'} = \bar{g}^4_4 \tag{7}$$

erkennen wir, daß wir durch den Übergang zu den quergestrichenen Basisvektoren Größen erhalten haben, deren räumliche Indizes und deren zeitliche Indizes sich gegenüber bezugsinvarianten Transformationen jeweils für sich wie Tensorindizes transformieren. Die Raum-Zeit wird also in das Produkt aus dem 3-dimensionalen Ortsraum und der 1-dimensionalen Zeit zerlegt, wobei jeder dieser Unterräume bei bezugsinvarianten Transformationen eine selbständige Rolle spielt.

Dieses relative Eigenleben dieser beiden Kategorien von Indizes kommt auch in den folgenden ohne Schwierigkeiten abzuleitenden Formeln zum Ausdruck, die den Mechanismus der Indexbewegung bei den quergestrichenen Basisvektoren beschreiben:

$$\bar{\mathfrak{e}}^a = \bar{g}^{ab}\,\bar{\mathfrak{e}}_b, \; \bar{\mathfrak{e}}_a = \bar{g}_{ab}\,\bar{\mathfrak{e}}^b, \; \bar{\mathfrak{e}}^4 = \bar{g}^{44}\,\bar{\mathfrak{e}}_4, \; \bar{\mathfrak{e}}_4 = \bar{g}_{44}\,\bar{\mathfrak{e}}^4. \tag{8}$$

Aus den ersten beiden Relationen entsteht durch Produktbildung die weitere wichtige Beziehung

$$\bar{g}^{ab}\,\bar{g}_{cb} = \bar{g}^a_c = g^a_c\,. \tag{9}$$

Ähnlich wie in der üblichen Tensorrechnung erhalten wir die Formeln

a) $$\bar{g}^{ab}{}_{,c} = -\,\bar{g}^{ad}\,\bar{g}^{be}\,\bar{g}_{de,c}, \tag{10}$$

und

b) $$\bar{g}_{ab,c} = -\,\bar{g}_{ad}\,\bar{g}_{be}\,\bar{g}^{de}{}_{,c}. \tag{11}$$

§ 2. Physikalische Zerlegung von Tensoren durch Projektion auf den Ortsraum und die Zeitrichtung

Einen in der Raum-Zeit gegebenen beliebigen Vektor $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}_\mu a^\mu$ zerlegen wir durch Projektion auf den Ortsraum und die Zeitrichtung in seine physikalischen Bestandteile:

$$\bar{a}^b = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{e}}^b = a^\mu g^b_\mu = a^b, \tag{12}$$
$$\bar{a}^4 = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{e}}^4 = a^\mu \left(g^4_\mu + \frac{g_{4a}}{g_{44}} g^a_\mu \right) = a^4 + \frac{g_{4b}}{g_{44}} a^b.$$

Analog entstehen die Relationen

$$\bar{a}_b = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{e}}_b = a_\mu \left(g^\mu_b - \frac{g_{4b}}{g_{44}} g^\mu_4 \right) = a_b - \frac{g_{4b}}{g_{44}} a_4,$$
$$\bar{a}_4 = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{e}}_4 = a_4. \tag{13}$$

Damit können wir den Vektor $\mathfrak{a}$ auch in der Form

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{e}_\mu a^\mu = \bar{\mathfrak{e}}_b \bar{a}^b + \bar{\mathfrak{e}}_4 \bar{a}^4 = \bar{\mathfrak{e}}^b \bar{a}_b + \bar{\mathfrak{e}}^4 \bar{a}_4 \tag{14}$$

schreiben.

Die Anwendung dieser Zerlegung auf den Bogendifferentialvektor führt uns auf die Beziehungen

$$\mathrm{d}\mathfrak{s} = \mathfrak{e}_\mu\, \mathrm{d}x^\mu = \bar{\mathfrak{e}}_a\, \mathrm{d}\bar{x}^a + \bar{\mathfrak{e}}_4\, \mathrm{d}\bar{x}^4 = \mathrm{d}\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{e}}_4 \frac{c}{\sqrt{-g_{44}}}\, \mathrm{d}t \tag{15}$$

und

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}\sigma)^2 - c^2 (\mathrm{d}t)^2 \tag{16}$$

[$(\mathrm{d}\sigma)^2 = (\mathrm{d}\mathfrak{r})^2$ Invariante gegen bezugsinvariante Transformationen].

Die gegen bezugsinvariante Transformationen invariante Größe t, definiert durch die differentielle Gleichung

$$\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{-g_{44}}}{c}\, \mathrm{d}\bar{x}^4 \tag{17}$$

wollen wir auf Grund der Struktur von (16) als die physikalische Zeit ansehen.

Die Verallgemeinerung der Projektionsbeziehungen (12) und (13) auf Tensoren höherer Stufe erhalten wir durch Produktbildung der Tensoren 1. Stufe. Die entstehenden Formeln werden als allgemeine Definitionen genommen:

$$\bar{T}_{a\cdot\cdot}{}^{b\cdot\cdot} = T_{a\cdot\cdot}{}^{b\cdot\cdot} - \frac{g_{4a}}{g_{44}} T_{4\cdot\cdot}{}^{b\cdot\cdot} + \cdots,$$
$$\bar{T}_{a\cdot\cdot}{}^{4\cdot\cdot} = T_{a\cdot\cdot}{}^{4\cdot\cdot} - \frac{g_{4a}}{g_{44}} T_{4\cdot\cdot}{}^{4\cdot\cdot} + \frac{g_{4b}}{g_{44}} T_{a\cdot\cdot}{}^{b\cdot\cdot} - \frac{g_{4a} g_{4b}}{(g_{44})^2} T_{4\cdot\cdot}{}^{b\cdot\cdot} + \cdots,$$
$$\bar{T}_{4\cdot\cdot}{}^{a\cdot\cdot} = T_{4\cdot\cdot}{}^{a\cdot\cdot} + \cdots, \tag{18}$$
$$\bar{T}_{4\cdot\cdot}{}^{4\cdot\cdot} = T_{4\cdot\cdot}{}^{4\cdot\cdot} + \frac{g_{4b}}{g_{44}} T_{4\cdot\cdot}{}^{b\cdot\cdot} + \cdots$$

In den Formeln (8) haben wir den Mechanismus der Indexbewegung bei den quergestrichenen Basisvektoren erfaßt. In analoger Weise führt man den Beweis für einen beliebigen quergestrichenen Tensor. Das Ergebnis lautet:

$$\bar{T}^{a\cdot\cdot}_{\cdot\cdot} = \bar{g}^{ab} \bar{T}_{b\cdot\cdot}^{\cdot\cdot} = \bar{g}^{a\mu} \bar{T}_{\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot}, \qquad \bar{T}_{a\cdot\cdot}^{\cdot\cdot} = \bar{g}_{ab} \bar{T}^{b\cdot\cdot}_{\cdot\cdot} = \bar{g}_{a\mu} \bar{T}^{\mu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot},$$
$$\bar{T}^{4\cdot\cdot}_{\cdot\cdot} = \bar{g}^{44} \bar{T}_{4\cdot\cdot}^{\cdot\cdot} = \bar{g}^{4\mu} \bar{T}_{\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot}, \qquad \bar{T}_{4\cdot\cdot}^{\cdot\cdot} = \bar{g}_{44} \bar{T}^{4\cdot\cdot}_{\cdot\cdot} = \bar{g}_{4\mu} \bar{T}^{\mu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot},$$

so daß allgemein

$$\bar{T}^{\varkappa\cdot\cdot}_{\cdot\cdot} = \bar{g}^{\varkappa\mu} \bar{T}_{\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot}, \qquad \bar{T}_{\varkappa\cdot\cdot}^{\cdot\cdot} = \bar{g}_{\varkappa\mu} \bar{T}^{\mu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$$

geschrieben werden kann.

Nach einiger Rechnung folgen aus den Definitionen (18) gegenüber bezugsinvarianten Transformationen die Transformationsformeln

$$\bar{T}_{a'\cdot\cdot}{}^{b'\cdot\cdot} = A^a_{a'} A^{b'}_b \cdot\cdot \bar{T}_{a\cdot\cdot}{}^{b\cdot\cdot},$$
$$\bar{T}_{a'\cdot\cdot}{}^{4'\cdot\cdot} = A^a_{a'} A^{4'}_4 \cdot\cdot \bar{T}_{a\cdot\cdot}{}^{4\cdot\cdot},$$
$$\bar{T}_{4'\cdot\cdot}{}^{a'\cdot\cdot} = A^{4'}_4 A^{a'}_a \cdot\cdot \bar{T}_{4\cdot\cdot}{}^{a\cdot\cdot},$$
$$\bar{T}_{4'\cdot\cdot}{}^{4'\cdot\cdot} = \bar{T}_{4\cdot\cdot}{}^{4\cdot\cdot}. \tag{19}$$

Man beachte, daß $\bar{T}_{a'} = A^a_{a'} \bar{T}_a + A^\mu_{a'} \bar{T}_\mu$ usw. ist.

Aus den letzten Ergebnissen erkennen wir erneut unsere frühere Feststellung, daß sich gegenüber bezugsinvarianten Transformationen die räumlichen Indizes und die zeitlichen Indizes der quergestrichenen Größen jeweils für sich wie Tensorindizes transformieren. Deshalb nennen wir die quergestrichenen Größen „physikalische Komponenten".

§ 3. Projektive partielle und projektive kovariante Ableitung

Die Untersuchungen dieses Abschnittes gelten den Differentialableitungen der physikalischen Tensorkomponenten. Es zeigt sich, daß sich zwei Differentialoperationen einführen lassen, wovon die erste, genannt projektive partielle Ableitung und bezeichnet mit einem Haken ($\llcorner$), der partiellen Ableitung, und die zweite, genannt projektive kovariante Ableitung und bezeichnet mit einem punktierten Haken ($\dot{\llcorner}$), der Riemannschen kovarianten Ableitung korrespondiert. Unter gewissen Einschränkungen ist die projektive partielle Ableitung die Projektion der partiellen Ableitung und die projektive kovariante Ableitung der Projektion der Riemannschen kovarianten Ableitung. Davon rührt unsere Bezeichnungsweise her. Generell gilt dieser Zusammenhang jedoch nicht.

Den Haken haben wir bei den projektiven Ableitungen als Grundsymbol verwendet, um anzudeuten, daß sich diese Ableitungen auf die Aufspaltung der Raum-Zeit in den physikalischen Ortsraum und die darauf senkrecht stehende Zeitrichtung beziehen.

Wir definieren die projektive partielle Ableitung einer allgemeinen Größe $T::$ durch die Gleichungen

$$\text{a)}\ T::_{\llcorner a} = T::_{,a} - \frac{g_{4a}}{g_{44}} T::_{,4}\,; \quad \text{b)}\ {}_{\llcorner}T::_{\llcorner 4} = T::_{,4}\,. \tag{20}$$

Aus diesen Definitionen geht sofort hervor, daß die projektive partielle Ableitung einer Summe gleich der Summe der projektiven partiellen Ableitung ist und daß für die projektive partielle Ableitung die LEIBNIZsche Produktregel gilt:

$$(\chi + \Phi)_{\llcorner\mu} = \chi_{\llcorner\mu} + \Phi_{\llcorner\mu}\,, \quad (\chi\Phi)_{\llcorner\mu} = \chi_{\llcorner\mu}\Phi + \chi\Phi_{\llcorner\mu}\,.$$

Wie ein Blick auf (13) zeigt, können wir in dem Fall, wo T eine Invariante ist, die projektive partielle Ableitung als Projektion der partiellen Ableitung in den Ortsraum auffassen:

$$T_{\llcorner a} = T_{;\bar{a}}\,, \quad T_{\llcorner 4} = T_{;4}\,.$$

Die projektive kovariante Ableitung definieren wir ganz allgemein durch die Gleichung

$$\overline{T}{}^{\mu\cdot\cdot}_{\nu\cdot\cdot\llcorner\varkappa} = \overline{T}{}^{\mu\cdot\cdot}_{\nu\cdot\cdot\llcorner\varkappa} + \overline{\left\{ {\mu \atop \sigma\varkappa} \right\}}\, \overline{T}{}^{\sigma\cdot\cdot}_{\nu\cdot\cdot} - \overline{\left\{ {\sigma \atop \nu\varkappa} \right\}}\, \overline{T}{}^{\mu\cdot\cdot}_{\sigma\cdot\cdot} + \ldots, \tag{21}$$

wobei die zugehörigen Affinitäten im Laufe späterer detaillierter Untersuchungen ermittelt werden sollen. Im besonderen Fall eines Tensors 1. Stufe schreibt sich die letzte Gleichung in der Form

$$\overline{T}{}^{\mu}{}_{\llcorner\varkappa} = \overline{T}{}^{\mu}{}_{\llcorner\varkappa} + \overline{\left\{ {\mu \atop \sigma\varkappa} \right\}}\, \overline{T}{}^{\sigma}, \tag{22}$$

bzw.

$$\overline{T}_{\mu\llcorner\varkappa} = \overline{T}_{\mu\llcorner\varkappa} - \overline{\left\{ {\sigma \atop \mu\varkappa} \right\}}\, \overline{T}_{\sigma}\,. \tag{23}$$

Angewandt auf die physikalischen Basisvektoren resultiert

$$\overline{e}{}^{\mu}{}_{\llcorner\varkappa} = \overline{e}{}^{\mu}{}_{\llcorner\varkappa} + \overline{\left\{ {\mu \atop \sigma\varkappa} \right\}}\, \overline{e}{}^{\sigma}, \tag{24}$$

bzw.

$$\overline{e}_{\mu\llcorner\varkappa} = \overline{e}_{\mu\llcorner\varkappa} - \overline{\left\{ {\sigma \atop \mu\varkappa} \right\}}\, \overline{e}_{\sigma}\,. \tag{25}$$

Postulat:

Die physikalische Geometrie der Raum-Zeit soll in verallgemeinerter Begriffsbildung metrisch sein:

$$\text{a)}\ \overline{g}{}^{\mu\nu}{}_{\llcorner\varkappa} = 0, \quad \text{b)}\ \overline{g}_{\mu\nu\llcorner\varkappa} = 0, \quad \text{c)}\ \overline{g}{}^{\mu}_{\nu}{}_{\llcorner\varkappa} = 0. \tag{26}$$

Es läßt sich ohne Schwierigkeiten zeigen, daß die beiden Gleichungen (22) und (23) miteinander verträglich sind.

In Analogie zur üblichen kovarianten Ableitung fordern wir:

Postulat:

Die projektive kovariante Ableitung physikalischer Tensorkomponenten soll sich gegenüber bezugsinvarianten Transformationen tensoriell in dem Sinne transformieren, daß räumliche und zeitliche Indizes jeweils für sich dem tensoriellen Transformationsgesetz gehorchen.

Aus der Definition der projektiven kovarianten Ableitung geht hervor, daß die projektive kovariante Ableitung einer Summe gleich der Summe der projektiven kovarianten Ableitung ist:

$$(\chi + \Phi)_{\llcorner\mu} = \chi_{\llcorner\mu} + \Phi_{\llcorner\mu}\,.$$

Für die projektive kovariante Ableitung eines Produktes fordern wir:

Postulat:

Für die projektive kovariante Ableitung eines Produktes gelte die LEIBNIZ*sche Produktregel*

$$(\chi\Phi)_{\llcorner\mu} = \chi_{\llcorner\mu}\Phi + \chi\Phi_{\llcorner\mu}\,.$$

Es ist bemerkenswert, daß bezüglich bezugsinvarianter Transformationen ein 4-dimensionaler Tensor 1. Stufe existiert, der nur aus dem metrischen Tensor aufgebaut ist. Es handelt sich dabei um die Größe

$$g_{\mu} = \frac{g_{4\mu}}{\sqrt{g_{44}}}\,, \tag{27}$$

die wir metrischen Vektor (genauer bezüglich bezugsinvarianten Transformationen) nennen wollen. Das Transformationsgesetz

$$g_{\mu'} = A^{\mu}_{\mu'} g_{\mu}$$

ist eine unmittelbare Folge der beiden Transformationsformeln

$$g_{4'a'} = A^{4}_{4'}\,(A^{a}_{a'} g_{4a} + A^{4}_{a'} g_{44}) \tag{28}$$

und

$$g_{4'4'} = (A^{4}_{4'})^2\, g_{44}\,. \tag{29}$$

Bei Benutzung der beiden letzten Beziehungen resultieren für die projektive partielle Ableitung die Transformationsgesetze

$$\text{a)}\ T::_{\llcorner a'} = T::_{\llcorner a} A^{a}_{a'}\,, \quad \text{b)}\ T::_{\llcorner 4'} = T::_{\llcorner 4} A^{4}_{4'}\,. \tag{30}$$

Dabei ist $T::$ eine beliebige Größe, die in diesen Formeln nicht mittransformiert wurde. Deshalb ergibt die projektive partielle Ableitung von Tensoren nicht wieder Tensoren, weshalb die Einführung der projektiven kovarianten Ableitung notwendig ist.

Für die folgenden Rechnungen benötigen wir eine Reihe von Hilfsformeln, die wir hier zusammenstellen wollen: Vermöge bekannter Relationen aus der Tensorrechnung resultieren die Beziehungen

$$\left(\frac{g_{4a}}{g_{44}}\right)_{,b} = \frac{1}{g_{44}}\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{c}{4b} g_{ca} + \{a\,b,4\} - \frac{g_{4a}}{g_{44}}\{4\,b,4\}\right]. \quad (31)$$

$$\left(\frac{g_{4a}}{g_{44}}\right)_{,4} = \frac{1}{g_{44}}\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{c}{44} g_{ca} + \{a\,4,4\} - \frac{g_{4a}}{g_{44}}\{4\,4,4\}\right], \quad (32)$$

$$\bar{g}_{ab,c} = \{a\,c,b\} - \frac{g_{4b}}{g_{44}}\{a\,c,4\} + \{b\,c,a\} - \frac{g_{4a}}{g_{44}}\{b\,c,4\} - \frac{g_{4a}}{g_{44}}\{4\,c,b\} - \frac{g_{4b}}{g_{44}}\{4\,c,a\} + \frac{2\,g_{4a}g_{4b}}{(g_{44})^2}\{4\,c,4\}, \quad (33)$$

$$\bar{g}_{ab,4} = \{a\,4,b\} - \frac{g_{4b}}{g_{44}}\{a\,4,4\} + \{b\,4,a\} - \frac{g_{4a}}{g_{44}}\{b\,4,4\} - \frac{g_{4a}}{g_{44}}\{4\,4,b\} - \frac{g_{4b}}{g_{44}}\{4\,4,a\} + \frac{2g_{4a}g_{4b}}{(g_{44})^2}\{4\,4,4\}. \quad (34)$$

§ 4. Räumliche projektive kovariante Ableitung räumlicher Komponenten

Aus den Transformationsformeln

$$\bar{T}^{a'}{}_{\llcorner b'} = \bar{T}^{a}{}_{\llcorner b} A^{a'}_{a} A^{b}_{b'} + \bar{T}^{a} A^{b}_{b'} A^{a'}_{a,\,b} \qquad (35)$$

und

$$\bar{T}^{a'}{}_{\llcorner b'} = A^{a'}_{a} A^{b}_{b'} \bar{T}^{a}{}_{\llcorner b} \qquad (36)$$

folgen die Transformationsformeln für die quergestrichenen Affinitäten

$$\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{a'}{c'b'}} = A^{a'}_{a} A^{b'}_{b} A^{c}_{c'} \overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{a}{cb}} - A^{a'}_{c,b} A^{b}_{b'} A^{c}_{c'} \qquad (37)$$

und

$$\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{a'}{4'a'}} = A^{a'}_{a} A^{b}_{b'} A^{4}_{4'} \overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{a}{4b}}. \qquad (38)$$

Ähnliche Untersuchungen stellen wir bezüglich der kovarianten Komponente an und finden vermöge

$$\bar{T}_{a'\llcorner b'} = \bar{T}_{a\llcorner b} A^{a}_{a'} A^{b}_{b'} + \bar{T}_{a} A^{a}_{a',\,b'} \qquad (39)$$

und

$$\bar{T}_{a'\llcorner b'} = A^{a}_{a'} A^{b}_{b'} \bar{T}_{a\llcorner b} \qquad (40)$$

die neue Transformationsformel

$$\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{4'}{a'b'}} = \overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{4}{ab}} A^{a}_{a'} A^{b}_{b'} A^{4'}_{4}. \qquad (41)$$

Die Festlegung

$$\bar{e}^{a}{}_{\llcorner b} \bar{e}_{d} = 0 \qquad (42)$$

liefert uns bei Zurückgreifen auf (24) die bereits bei Cattaneo anzutreffende wichtige Beziehung

$$\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{a}{db}} = \genfrac\{\}{0pt}{}{a}{db} - \frac{g_{4b}}{g_{44}}\genfrac\{\}{0pt}{}{a}{4d} - \frac{g_{4d}}{g_{44}}\genfrac\{\}{0pt}{}{a}{4b} + \frac{g_{4b}g_{4d}}{(g_{44})^2}\genfrac\{\}{0pt}{}{a}{44} = \overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{a}{bd}}. \qquad (43)$$

Damit resultiert

$$\bar{e}^{a}{}_{\llcorner b} = \bar{e}^{4}\left[\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{a}{4b}} - \genfrac\{\}{0pt}{}{a}{4b} + \frac{g_{4b}}{g_{44}}\genfrac\{\}{0pt}{}{a}{44}\right]. \qquad (44)$$

Es ist interessant, daß für die quergestrichenen Affinitäten die an die übliche Tensorrechnung erinnernde Formel

$$\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{a}{cb}} = \bar{e}_{c\llcorner b}\, \bar{e}^{a} \qquad (45)$$

gilt. Auf die interessanten Verknüpfungsrelationen

$$\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{4}{ab}} = -\frac{g_{ac}}{g_{44}}\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{c}{4b}}, \quad \text{bzw.} \quad \overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{d}{4b}} = -\bar{g}^{ad} g_{44} \overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{4}{ab}} \qquad (46)$$

stoßen wir, wenn wir analoge Überlegung auf (25) anwenden und durch Indexbewegung die Formel (44) erzeugen.

In diesem Zusammenhang sind schließlich noch die beiden Formeln

$$\bar{g}^{ad}{}_{\llcorner b} = -\bar{g}^{cd}\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{a}{cb}} - \bar{g}^{ca}\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{d}{cb}} \qquad (47)$$

und

$$\bar{g}_{ad\llcorner b} = \bar{g}_{cd}\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{c}{ab}} + \bar{g}_{ca}\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{c}{db}} \qquad (48)$$

bemerkenswert.

§ 5. Räumliche projektive kovariante Ableitung zeitlicher Komponenten

Die Transformationsformeln

$$\bar{T}^{4'}{}_{\llcorner a'} = \bar{T}^{4}{}_{\llcorner a} A^{a}_{a'} A^{4'}_{4} + \bar{T}^{4} A^{a}_{a'} A^{4'}_{4\,\llcorner a} \qquad (49)$$

und

$$\bar{T}^{4'}{}_{\llcorner a'} = A^{4'}_{4} A^{a}_{a'} \bar{T}^{4}{}_{\llcorner a} \qquad (50)$$

liefern das neue Transformationsgesetz

$$\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{4'}{4'a'}} = \overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{4}{4a}} A^{a}_{a'} - A^{4'}_{4\,\llcorner a} A^{a}_{a'} A^{4}_{4'}. \qquad (51)$$

Das Postulat (26) in der konkreten Form

$$\bar{g}^{44}{}_{\llcorner b} = 2\,\bar{e}^{4}\bar{e}^{4}{}_{\llcorner b} = 0$$

zieht bei Zurückgreifen auf (24) die Beziehung

$$\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{4}{4b}} = \frac{1}{g_{44}}\left[\{4\,b,4\} - \frac{g_{4b}}{g_{44}}\{4\,4,4\}\right] \qquad (52)$$

nach sich. Damit folgt

$$\bar{e}^{4}{}_{\llcorner b} = -\frac{\bar{e}_{c}}{g_{44}}\left[\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{c}{4b}} - \genfrac\{\}{0pt}{}{c}{4b} + \frac{g_{4b}}{g_{44}}\genfrac\{\}{0pt}{}{c}{44}\right] \qquad (53)$$

und

$$\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{4}{4b}} = \bar{e}_{4\llcorner b}\,\bar{e}^{4}. \qquad (54)$$

§ 6. Zeitliche projektive kovariante Ableitung räumlicher Komponenten

Aus den Beziehungen

$$\bar{T}^{a'}{}_{\llcorner 4'} = \bar{T}^{a}{}_{\llcorner 4} A^{4}_{4'} A^{a'}_{a} \qquad (55)$$

und

$$\bar{T}^{a'}{}_{\llcorner 4'} = \bar{T}^{a}{}_{\llcorner 4} A^{a'}_{a} A^{4}_{4'} \qquad (56)$$

gewinnen wir die beiden Transformationsformeln

$$\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{a'}{b'4'}} = \overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{a}{b4}} A^{a'}_{a} A^{b}_{b'} A^{4}_{4'} \qquad (57)$$

und

$$\overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{a'}{4'4'}} = \overline{\genfrac\{\}{0pt}{}{a}{44}} A^{a'}_{a} (A^{4}_{4'})^2. \qquad (58)$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir aus

$$\overline{T}_{a'\llcorner 4'} = \overline{T}_{a\llcorner 4} A^a_{a'} A^4_{4'} \tag{59}$$

und

$$\overline{T}_{a'\dot{\llcorner} 4'} = \overline{T}_{a\dot{\llcorner} 4} A^a_{a'} A^4_{4'} \tag{60}$$

die Transformationsformel

$$\overline{\left\{ {4' \atop a'4'} \right\}} = \overline{\left\{ {4 \atop a4} \right\}} A^a_{a'} \,. \tag{61}$$

Die im Sinne von (42) erfolgte Festlegung

$$\overline{\mathrm{e}}^a{}_{\dot{\llcorner} 4}\, \overline{\mathrm{e}}_d = 0 \tag{62}$$

ergibt

$$\overline{\left\{ {a \atop d4} \right\}} = \left\{ {a \atop d4} \right\} - \frac{g_{4d}}{g_{44}} \left\{ {a \atop 44} \right\} . \tag{63}$$

Damit resultiert

$$\overline{\mathrm{e}}^a{}_{\dot{\llcorner} 4} = \overline{\mathrm{e}}^4 \left[\overline{\left\{ {a \atop 44} \right\}} - \left\{ {a \atop 44} \right\} \right] \tag{64}$$

und

$$\overline{\left\{ {d \atop a4} \right\}} = \overline{\mathrm{e}}_{a\llcorner 4}\, \overline{\mathrm{e}}^d . \tag{65}$$

Überlegungen derselben Art führen auf die Beziehung

$$\overline{\mathrm{e}}_{a\dot{\llcorner} 4} = - \overline{\mathrm{e}}_4 \left[\overline{\left\{ {4 \atop a4} \right\}} + \frac{\overline{g}_{ba}}{g_{44}} \left\{ {b \atop 44} \right\} \right], \tag{66}$$

deren Vergleich mit (64) die beiden Verknüpfungsrelationen

$$\overline{\left\{ {4 \atop a4} \right\}} = - \frac{\overline{g}_{ba}}{g_{44}} \overline{\left\{ {b \atop 44} \right\}} , \text{ bzw. } \quad \overline{\left\{ {a \atop 44} \right\}} = - \overline{g}^{ac} g_{44} \overline{\left\{ {4 \atop c4} \right\}} \tag{67}$$

nach sich zieht.

§ 7. Zeitliche projektive kovariante Ableitung zeitlicher Komponenten

Die beiden Transformationsgesetze

$$\overline{T}^{4'}{}_{\llcorner 4'} = \overline{T}^4{}_{\llcorner 4} + \overline{T}^4 A^{4'}_{4,4} A^4_{4'} \tag{68}$$

und

$$\overline{T}^{4'}{}_{\dot{\llcorner} 4'} = \overline{T}^4{}_{\dot{\llcorner} 4} \tag{69}$$

liefern die neue Transformationsformel

$$\overline{\left\{ {4' \atop 4'4'} \right\}} = \overline{\left\{ {4 \atop 44} \right\}} A^4_{4'} - A^4_{4,4} (A^4_{4'})^2 . \tag{70}$$

Das Postulat (26) in der konkreten Gestalt

$$g^{44}{}_{\dot{\llcorner} 4} = 2\, \overline{\mathrm{e}}^4\, \overline{\mathrm{e}}^4{}_{\dot{\llcorner} 4} = 0$$

führt auf

$$\overline{\left\{ {4 \atop 44} \right\}} = \frac{1}{g_{44}} \{4\,4, 4\} . \tag{71}$$

Daraus folgt dann

$$\overline{\mathrm{e}}^4{}_{\dot{\llcorner} 4} = \frac{\mathrm{e}_c}{g_{44}} \left[- \overline{\left\{ {c \atop 44} \right\}} + \left\{ {c \atop 44} \right\} \right] \tag{72}$$

und

$$\overline{\left\{ {4 \atop 44} \right\}} = \overline{\mathrm{e}}_{4\llcorner 4}\, \overline{\mathrm{e}}^4 . \tag{73}$$

§ 8. Festlegung der übrigen quergestrichenen Affinitäten

Durch unsere bisherige Axiomatik sind noch nicht festgelegt die Größen

$$\overline{\left\{ {a \atop 4c} \right\}},\ \overline{\left\{ {a \atop 44} \right\}},\ \overline{\left\{ {4 \atop ab} \right\}},\ \overline{\left\{ {4 \atop a4} \right\}} .$$

Gelingt es uns, die ersten bzw. die zweiten beiden durch eine Forderung zu fixieren, so sind die restlichen beiden durch die Verknüpfungsgleichungen (46) bzw. (67) bestimmt. Wie durch einige Rechnungen gezeigt werden kann, sind diese Verknüpfungsgleichungen mit den Transformationsformeln für die verknüpften Größen im Einklang. Es kommt also jetzt darauf an, eine sinnvolle Festlegungsvorschrift zu finden.

Zunächst könnte man daran denken, Symmetrie der quergestrichenen Dreiindex-Symbole in den unteren beiden Indizes zu fordern. Ein solches Postulat ist aber nicht konsistent, denn es transformieren sich die Größen $\overline{\left\{ {4 \atop a4} \right\}}$ und $\overline{\left\{ {4 \atop 4a} \right\}}$ unterschiedlich. Auch eine Definitionsmöglichkeit der Art

$$\overline{\left\{ {\mu \atop \nu\varkappa} \right\}} = \overline{\mathrm{e}}_{\nu\llcorner\varkappa}\, \overline{\mathrm{e}}^\mu ,$$

an die man denken könnte, erweist sich nicht als sinnvoll. Dagegen kommen wir durch nachstehendes Postulat zu einer befriedigenden Fixierung:

Postulat:

In der projektiven kovarianten Ableitung räumlicher Komponenten sollen nur räumliche Komponenten und in der projektiven kovarianten Ableitung zeitlicher Komponenten sollen nur zeitliche Komponenten erscheinen.

Das führt uns auf die Gleichungen

$$\overline{\left\{ {a \atop 4b} \right\}} = 0,\quad \overline{\left\{ {4 \atop ab} \right\}} = 0,\quad \overline{\left\{ {a \atop 44} \right\}} = 0,\quad \overline{\left\{ {4 \atop a4} \right\}} = 0. \tag{74}$$

§ 9. Krümmungsuntersuchungen

Nach einiger Rechnung erhalten wir die beiden interessanten Formeln

$$\overline{T}_{\mu\dot{\llcorner}\varkappa} - \overline{T}_{\varkappa\dot{\llcorner}\mu} = \overline{T}_{\mu\llcorner\varkappa} - \overline{T}_{\varkappa\llcorner\mu} + 2\, \overline{S}_{\varkappa\mu}{}^\sigma\, \overline{T}_\sigma \tag{75}$$

und

$$\overline{T}_{\mu\dot{\llcorner}\varkappa\dot{\llcorner}\lambda} - \overline{T}_{\mu\dot{\llcorner}\lambda\dot{\llcorner}\varkappa} = \overline{T}_{\mu\llcorner\varkappa\llcorner\lambda} - \overline{T}_{\mu\llcorner\lambda\llcorner\varkappa} + \overline{T}_\sigma\, \overline{R}^\sigma{}_{\mu\varkappa\lambda} - 2\, \overline{T}_{\mu\dot{\llcorner}\sigma}\, \overline{S}_{\varkappa\lambda}{}^\sigma . \tag{76}$$

Dabei ist

$$\overline{R}^\sigma{}_{\mu\varkappa\lambda} = \overline{\left\{ {\sigma \atop \mu\lambda} \right\}}_{\llcorner\varkappa} - \overline{\left\{ {\sigma \atop \mu\varkappa} \right\}}_{\llcorner\lambda} + \overline{\left\{ {\varrho \atop \mu\lambda} \right\}}\, \overline{\left\{ {\sigma \atop \varrho\varkappa} \right\}} - \overline{\left\{ {\varrho \atop \mu\varkappa} \right\}}\, \overline{\left\{ {\sigma \atop \varrho\lambda} \right\}} \tag{77}$$

und

$$\overline{S}_{\varkappa\lambda}{}^\sigma = \tfrac{1}{2} \left(\overline{\left\{ {\sigma \atop \varkappa\lambda} \right\}} - \overline{\left\{ {\sigma \atop \lambda\varkappa} \right\}} \right) . \tag{78}$$

Man beachte die Antisymmetrie

$$\bar{R}^{\sigma}{}_{\mu\varkappa\lambda} = -\bar{R}^{\sigma}{}_{\mu\lambda\varkappa}. \tag{79}$$

Die übrigen vom RIEMANNschen Krümmungstensor her geläufigen Symmetrieeigenschaften existieren nicht.

Die Größe $\bar{R}^{\sigma}{}_{\mu\varkappa\lambda}$, die man als physikalischen Krümmungstensor ansprechen könnte, ist mit den Basisvektoren folgendermaßen verknüpft:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\varrho\mu\varkappa\lambda} &= g_{\sigma\varrho}\bar{R}^{\sigma}{}_{\mu\varkappa\lambda}\\ &= e_{\varrho}\,(e_{\mu\llcorner\varkappa\llcorner\lambda} - e_{\mu\llcorner\lambda\llcorner\varkappa}) + e_{\varrho}\,(e_{\mu\llcorner\lambda\llcorner\varkappa} - e_{\mu\llcorner\varkappa\llcorner\lambda})\\ &\quad + 2\,e_{\varrho}\,e_{\mu\llcorner\sigma}\,S_{\varkappa\lambda}{}^{\sigma}.\end{aligned} \tag{80}$$

Im folgenden beschäftigen wir uns mit der Krümmungsstruktur des Ortsraumes. Wegen

$$S_{ab}{}^{i} = 0$$

werden in diesem Spezialfall die Verhältnisse besonders einfach. So erhalten wir bei Benutzung der Abkürzung $\overline{\{d\,b,c\}} = \overline{\{{a \atop db}\}}\,\bar{g}_{ac}$ die Formel

$$\begin{aligned}\bar{R}_{fabc} = \bar{R}^{d}{}_{abc}\,\bar{g}_{df} &= \overline{\{a\,c,f\}}_{\llcorner b} - \overline{\{a\,b,f\}}_{\llcorner c} + \overline{\{{d \atop ab}\}}\,\overline{\{f\,c,d\}} - \overline{\{{d \atop ac}\}}\,\overline{\{f\,b,d\}}\\ &= \tfrac{1}{2}\,[\bar{g}_{af\llcorner c\llcorner b} - \bar{g}_{af\llcorner b\llcorner c} + \bar{g}_{cf\llcorner a\llcorner b} + \bar{g}_{ab\llcorner f\llcorner c} - \bar{g}_{ac\llcorner f\llcorner b} - \bar{g}_{bf\llcorner a\llcorner c}] + \overline{\{{d \atop ab}\}}\,\overline{\{fc,d\}} - \overline{\{{d \atop ac}\}}\,\overline{\{f\,b,d\}}.\end{aligned} \tag{81}$$

Durch eine Nebenrechnung bekommen wir für die Vertauschung projektiver partieller Ableitungen die Relation

$$\begin{aligned}\chi_{\llcorner c\llcorner b} - \chi_{\llcorner b\llcorner c} = \chi_{,c,b} - \chi_{,b,c} - \frac{g_{4c}}{g_{44}}\,(\chi_{,4,b} - \chi_{,b,4}) - \frac{g_{4b}}{g_{44}}\,(\chi_{,c,4} - \chi_{,4,c}) + \frac{\chi_{|4}}{(g_{44})^{2}}\,[(\{{d \atop 44}\}\,(g_{4b}\,g_{dc} - g_{4c}\,g_{db})\\ + g_{44}\,(\{{d \atop 4c}\}\,\bar{g}_{bd} - \{{d \atop 4b}\}\,\bar{g}_{cd})].\end{aligned} \tag{82}$$

Verwenden wir diese, so können wir endgültig

$$\begin{aligned}\bar{R}_{fabc} = \tfrac{1}{2}\,[\bar{g}_{cf\llcorner a\llcorner b} + \bar{g}_{ab\llcorner f\llcorner c} - \bar{g}_{ac\llcorner f\llcorner b} - \bar{g}_{bf\llcorner a\llcorner c}] + \overline{\{{g \atop ab}\}}\,\overline{\{fc,g\}} - \overline{\{{g \atop ac}\}}\,\overline{\{fb,g\}}\\ + \frac{1}{2\,(g_{44})^{2}}\,\bar{g}_{af,4}\,[\{{d \atop 44}\}\,(g_{4b}\,g_{dc} - g_{4c}\,g_{db}) + g_{44}\,(\{{d \atop 4c}\}\,\bar{g}_{db} - \{{d \atop 4b}\}\,\bar{g}_{dc})]\end{aligned} \tag{83}$$

schreiben. Durch eine längere Rechnung gelingt es, den Tensorcharakter dieser Größe gegenüber bezugsinvarianten Transformationen nachzuweisen.

Mit dem RIEMANNschen Krümmungstensor $R^{d}{}_{abc}$ besteht der folgende Zusammenhang

$$\begin{aligned}\bar{R}^{d}{}_{abc} = R^{d}{}_{abc} - \frac{g_{4c}}{g_{44}}\,R^{d}{}_{ab4} - \frac{g_{4b}}{g_{44}}\,R^{d}{}_{a4c} - \frac{g_{4a}}{g_{44}}\,R^{d}{}_{4bc} + \frac{g_{4a}\,g_{4c}}{(g_{44})^{2}}\,R^{d}{}_{4b4} + \frac{g_{4a}g_{4b}}{(g_{44})^{2}}\,R^{d}{}_{44c}\\ + \frac{1}{(g_{44})^{2}}\,[\{{d \atop 4a}\}\,\{\{{f \atop 44}\}\,(g_{4b}\,g_{fc} - g_{4c}\,g_{fb}) + \{{f \atop 4c}\}\,g_{44}\,\bar{g}_{bf} - \{{f \atop 4b}\}\,g_{44}\,\bar{g}_{cf}\} - \{{d \atop 44}\}\left\{\{{f \atop 44}\}\,\frac{g_{4a}}{g_{44}}\,(g_{4b}\,g_{fe} - g_{4c}\,g_{fb}) + \{{f \atop 4c}\}\,g_{4a}\,\bar{g}_{bf}\right.\\ \left. - \{{f \atop 4b}\}\,g_{4a}\,\bar{g}_{cf} - \bar{g}_{af}\,(\{{f \atop 4b}\}\,g_{4c} - \{{f \atop 4c}\}\,g_{4b})\right\} + \{{d \atop 4b}\}\,(\{{f \atop 4c}\}\,g_{44} - \{{f \atop 44}\}\,g_{4c})\,\bar{g}_{fa} - \{{d \atop 4c}\}\,(\{{f \atop 4b}\}\,g_{44} - \{{f \atop 44}\}\,g_{4b})\,\bar{g}_{fa}].\end{aligned} \tag{84}$$

und

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ab} = \bar{R}^{c}{}_{abc} = R_{ab} - \frac{1}{g_{44}}\,[R_{4ab4} + g_{4a}\,R_{4b} + g_{4b}\,R_{4a}] + \frac{g_{4a}g_{4b}}{(g_{44})^{2}}\,R_{44}\\ + \frac{1}{(g_{44})^{2}}\Big[\{{c \atop 4a}\}\,\{4\,4,c\}g_{4b} - \{4\,4,b\}\,g_{4c} + \{4\,c,b\}\,g_{44} - \{4\,c,4\}\,g_{4b} + \{4\,b,4\}\,g_{4c} - \{4\,b,c\}\,g_{44}\\ + \{{c \atop 4b}\}\Big\{\{4\,4,4\}\bar{g}_{ca} + \{4\,4,c\}\,g_{4a} - \{4\,4,a\}\,g_{4c} + \{4\,c,a\}\,g_{44} - \{4\,c,4\}\,g_{4a} - \{{\mu \atop 4\mu}\}\,\bar{g}_{ca}\,g_{44}\Big\}\\ + g_{4a}\,\{{c \atop 44}\}\Big\{\{4\,4,b\}\frac{g_{4c}}{g_{44}} - \{4\,c,b\} + \{{4 \atop 4c}\}\,g_{4b} - \{{4 \atop 44}\}\,\frac{g_{4c}g_{4b}}{g_{44}}\Big\}\\ + g_{4b}\,\{{c \atop 44}\}\Big\{\{{\mu \atop 4\mu}\}\,g_{ca} - \{{4 \atop 44}\}\,g_{ca} - \{4\,c,a\} + \{{4 \atop 4c}\}\,g_{4a}\Big\}\\ + \frac{g_{4a}g_{4b}}{g_{44}}\,\{{c \atop 44}\}\Big\{2\{4\,c,4\} - \{4\,4,c\} - 2\,\{{4 \atop 4c}\}\,g_{44} + 2\,\{{4 \atop 44}\}\,g_{4c} - \{{\mu \atop 4\mu}\}\,g_{4c}\Big\}\Big].\end{aligned} \tag{85}$$

§ 10. Zusammenhang zwischen der projektiven und der Riemannschen kovarianten Ableitung

Wir betrachten den Tensor 1. Stufe T^{μ}. Seine RIEMANNsche kovariante Ableitung ist gegeben durch

$$T^{\mu}{}_{;\nu} = T^{\mu}{}_{,\nu} + \{{\mu \atop \varkappa\nu}\}\,T^{\varkappa}, \tag{86}$$

während die projektive kovariante Ableitung durch

$$\bar{T}^{\mu}{}_{\llcorner\nu} = \bar{T}^{\mu}{}_{\llcorner\nu} + \overline{\{{\mu \atop \varkappa\nu}\}}\,\bar{T}^{\varkappa} \tag{87}$$

definiert ist. Der Zusammenhang der beiden Sorten von kovarianten Ableitungen ist nicht in einer geschlossenen 4-dimensionalen Art anzugeben. Spezialisieren wir diese Formeln auf räumliche und zeitliche Indizes, so bekommen wir nach einer etwas längeren Rechnung die fundamentalen Verknüpfungen

$$T^a{}_{;b} = \bar{T}^a{}_{\llcorner b} + \left\{ {a \atop 4b} \right\} T^4 + \frac{g_{4b}}{g_{44}} \bar{T}^a{}_{\llcorner 4}\,, \tag{88}$$

$$T^a{}_{;4} = \bar{T}^a{}_{\llcorner 4} + \left\{ {a \atop 44} \right\} T^4\,, \tag{89}$$

$$T^4{}_{;a} = \bar{T}^4{}_{\llcorner a} - \frac{g_{4b}}{g_{44}} \bar{T}^b{}_{\llcorner a} + \frac{g_{4a}}{g_{44}} \bar{T}^4{}_{\llcorner 4} - \frac{g_{4a} g_{4b}}{(g_{44})^2} \bar{T}^b{}_{\llcorner 4} - \frac{\bar{g}_{bc}}{g_{44}} \left\{ {b \atop 4a} \right\} \bar{T}^c - \frac{g_{4c}}{g_{44}} \left\{ {c \atop 4a} \right\} \bar{T}^4\,, \tag{90}$$

$$T^4{}_{;4} = \bar{T}^4{}_{\llcorner 4} - \frac{g_{4b}}{g_{44}} \bar{T}^b{}_{\llcorner 4} - \frac{g_{4b}}{g_{44}} \left\{ {b \atop 44} \right\} \bar{T}^4 - \frac{\bar{g}_{cb}}{g_{44}} \left\{ {b \atop 44} \right\} \bar{T}^c. \tag{91}$$

Die Verallgemeinerung dieser Formeln auf Tensoren höherer Stufe liegt auf der Hand. Formeln dieser Art benötigt man, wenn man physikalische Feldgleichungen in den Ortsraum und auf die Zeitrichtung projizieren will.

§ 11. Physikalische Aufspaltung der Einsteinschen Bewegungsgleichung

Wir gehen von der EINSTEINschen Bewegungsgleichung

$$m_0 \left[\frac{d^2 x^\varrho}{d\tau^2} + \left\{ {\varrho \atop \sigma\varkappa} \right\} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\varkappa}{d\tau} \right] = \frac{e}{c} B^\varrho{}_\sigma \frac{dx^\sigma}{d\tau} \tag{92}$$

aus. Mit Hilfe der Formeln (88) und (89) entsteht

$$m_0 \left[\left(\frac{d\bar{x}^a}{d\tau} \right)_{\llcorner \mu} \frac{d\bar{x}^\mu}{d\tau} + \left(\left\{ {a \atop 4b} \right\} - \frac{g_{4b}}{g_{44}} \left\{ {a \atop 44} \right\} \right) \frac{d\bar{x}^b}{d\tau} \frac{d\bar{x}^4}{d\tau} + \left\{ {a \atop 44} \right\} \left(\frac{d\bar{x}^4}{d\tau} \right)^2 \right] = \frac{e}{c} B^a{}_\sigma \frac{dx^\sigma}{d\tau}. \tag{93}$$

Wir bezeichnen

$$^{(\mathrm{I})}b^a = \left(\frac{d\bar{x}^a}{d\tau} \right)_{\llcorner \mu} \frac{d\bar{x}^\mu}{d\tau} \tag{94}$$

als Inertialbeschleunigung, da sie uns als die direkte Verallgemeinerung der üblichen Inertialbeschleunigung erscheint. Die Größe

$$^{(\mathrm{C})}b^a = \left(\left\{ {a \atop 4b} \right\} - \frac{g_{4b}}{g_{44}} \left\{ {a \atop 44} \right\} \right) \frac{d\bar{x}^b}{d\tau} \frac{d\bar{x}^4}{d\tau} \tag{95}$$

nennen wir CORIOLIS-Beschleunigung, während wir den Ausdruck

$$^{(\mathrm{G,Z})}b^a = \left\{ {a \atop 44} \right\} \left(\frac{d\bar{x}^4}{d\tau} \right)^2 \tag{96}$$

als kombinierte Zentripetal- und Gravitationsbeschleunigung anzusehen haben. All diese drei Größen besitzen gegenüber bezugsinvarianten Transformationen Tensorcharakter, weshalb ihnen eine selbständige Bedeutung im Rahmen eines vorgegebenen Bezugssystems zugeschrieben werden muß. Es ist dadurch für einen in einem bestimmten Bezugssystem befindlichen Beobachter möglich, die an einer geladenen Masse in Erscheinung tretende Beschleunigung in diese drei Bestandteile aufzulösen. Koordinatentransformationen innerhalb dieses Bezugssystems zerstören diese Identifizierung nicht. Dagegen werden beim Übergang zu einem neuen Bezugssystem, in dem die obige Identifizierung natürlich ebenso möglich ist, diese Effekte untereinander vermischt, ähnlich wie bei einem solchen Übergang die elektrischen und magnetischen Qualitäten vermischt werden. Von einer permanenten Gravitationskraft im Sinne einer eigenen Wesenheit zu sprechen, ist also nicht sinnvoll. Diese Erkenntnis verdanken wir bereits EINSTEIN.

Die Rechtfertigung für diese Begriffsbildung leiten wir aus dem Übergang von einem Inertialsystem in ein gleichförmig rotierendes Karussell-System ab. Dieser Übergang wird beschrieben durch die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\omega \hat{t}) - y \sin(\omega \hat{t}), \\ y' &= x \sin(\omega \hat{t}) + y \cos(\omega t), \\ z' &= z, \\ t' &= \hat{t} \end{aligned} \tag{97}$$

bzw.

$$\begin{aligned} dx' &= dx \cos(\omega \hat{t}) - dy \sin(\omega \hat{t}) - \omega y' \, d\hat{t}, \\ dy' &= dx \sin(\omega \hat{t}) + dy \cos(\omega \hat{t}) + \omega x' \, d\hat{t}, \\ dz' &= dz, \\ dt' &= d\hat{t}. \end{aligned} \tag{98}$$

Auf diese Weise entsteht aus

$$(ds)^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - c^2 (dt')^2 \tag{99}$$

die Beziehung

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2 \left[1 - \frac{\omega^2}{c^2} (x^2 + y^2) \right] (d\hat{t})^2 + 2\,\omega (x\,dy - y\,dx)\, d\hat{t}. \tag{100}$$

Daraus lesen wir für den metrischen Tensor

$$g_{11} = 1,\ g_{22} = 1,\ g_{33} = 1,\ g_{44} = -\left[1 - \frac{\omega^2}{c^2} (x^2 + y^2) \right],$$
$$g_{12} = 0,\ g_{13} = 0,\ g_{23} = 0,\ g_{14} = -\frac{\omega}{c} y,$$
$$g_{24} = \frac{\omega}{c} x,\ g_{34} = 0 \tag{101}$$

ab. Aus dem Gleichungssystem $g_{\varkappa\mu}\, g^{\lambda\mu} = g_{\varkappa}^{\ \lambda}$ errechnen wir uns

$$g^{11} = 1 - \frac{\omega^2 y^2}{c^2},\ g^{22} = 1 - \frac{\omega^2 x^2}{c^2},\ g^{33} = 1,\ g^{44} = -1,$$

$$g^{12} = \frac{\omega^2 x\, y}{c^2},\ g^{13} = 0,\ g^{23} = 0,\ g^{14} = -\frac{\omega\, y}{c}, \qquad (102)$$

$$g^{24} = \frac{\omega\, x}{c},\ g^{34} = 0.$$

Damit bekommen wir für die Christoffel-Symbole die Formeln

$$\left\{ {1 \atop 44} \right\} = -\frac{\omega^2 x}{c^2},\ \left\{ {2 \atop 44} \right\} = -\frac{\omega^2 y}{c^2},\ \left\{ {3 \atop 44} \right\} = 0,\ \left\{ {1 \atop 41} \right\} = 0,$$

$$\left\{ {1 \atop 42} \right\} = -\frac{\omega}{c},\ \left\{ {1 \atop 43} \right\} = 0,\ \left\{ {2 \atop 41} \right\} = \frac{\omega}{c},\ \left\{ {2 \atop 42} \right\} = 0,$$

$$\left\{ {2 \atop 43} \right\} = 0,\ \left\{ {3 \atop 4a} \right\} = 0\,. \qquad (103)$$

Für die Coriolis-Beschleunigung resultiert daraus

$$^{(\mathrm{C})}b^1 = \frac{g_{44}}{2}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^4}{\mathrm{d}\tau}\left(g^{12}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} - g^{11}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)\left\{\left(\frac{g_{24}}{g_{44}}\right)_{,1} - \left(\frac{g_{14}}{g_{44}}\right)_{,2}\right\},$$

$$^{(\mathrm{C})}b^2 = \frac{g_{44}}{2}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^4}{\mathrm{d}\tau}\left(g^{22}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} - g^{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)\left\{\left(\frac{g_{24}}{g_{44}}\right)_{,1} - \left(\frac{g_{14}}{g_{44}}\right)_{,2}\right\},$$

$$^{(\mathrm{C})}b^3 = 0. \qquad (104)$$

In nichtrelativistischer Näherung entsteht daraus

$$^{(\mathrm{C})}b^1 = -\omega\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad ^{(\mathrm{C})}b^2 = \omega\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad ^{(\mathrm{C})}b^3 = 0, \quad (105)$$

in struktureller Übereinstimmung mit der nichtrelativistischen Theorie auf der Grundlage der Newtonschen Mechanik.

Unsere Definition der Coriolis-Beschleunigung führt nur auf den halben Wert der gewöhnlichen Coriolis-Beschleunigung. Wir haben deshalb jetzt die Frage zu untersuchen, ob es sich dabei um einen prinzipiellen Mangel oder nur um eine Definitionsangelegenheit handelt. Wir durchschauen die Situation leicht, wenn wir die früher gewonnene Bewegungsgleichung etwas umformen:

$$m_0\left[\left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}^a}{\mathrm{d}\tau}\right)_{\llcorner b}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^b}{\mathrm{d}\tau} + \left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}^a}{\mathrm{d}\tau}\right)_{\llcorner 4}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^4}{\mathrm{d}\tau}\right. \qquad (106)$$

$$\left. + 2\left(\left\{ {a \atop 4b} \right\} - \frac{g_{4b}}{g_{44}}\left\{ {a \atop 44} \right\}\right)\frac{\mathrm{d}\bar{x}^b}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^4}{\mathrm{d}\tau} + \left\{ {a \atop 44} \right\}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}^4}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right] = \frac{e}{c}B^a{}_\sigma\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau}.$$

Wir erkennen daraus, daß sich der geläufige Zahlenfaktor der Coriolis-Beschleunigung leicht durch Abtrennung eines Gliedes von der Inertialbeschleunigung erhalten läßt. Da dieses Glied gegenüber bezugsinvarianten Transformationen Tensorcharakter besitzt, so würde die dann übrigbleibende Inertialbeschleunigung auch wieder gegenüber bezugsinvarianten Transformationen Tensorcharakter besitzen. Allerdings würde sich dann diese Inertialbeschleunigung nicht mehr zu einem 4-dimensionalen Ausdruck zusammenfassen lassen, der das gewünschte Transformationsverhalten aufweist, denn es gilt die Transformationsformel

$$\left\{ {a' \atop c'b'} \right\}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^{c'}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^{b'}}{\mathrm{d}\tau} = \left\{ {a \atop cb} \right\} A^{a'}_a\frac{\mathrm{d}\bar{x}^c}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^b}{\mathrm{d}\tau} - A^{a'}_{c,b}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^c}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^b}{\mathrm{d}\tau}\,.$$

Da wir auf Transformationsgesichtspunkte großen Wert legen, so werden wir in unserer Definition der Coriolis-Beschleunigung bestärkt, denn in der Newtonschen Mechanik werden die beiden fraglichen Glieder unabhängig von ihrem Ursprung ohne Rücksicht auf Transformationseigenschaften einfach zur Coriolis-Beschleunigung zusammengefügt.

In analoger Weise bekommen wir für die Gravitations- und Zentripetalbeschleunigung

$$^{(\mathrm{G,Z})}b^1 = -\frac{1}{2}g^{1a}\, g_{44,a}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}^4}{\mathrm{d}\tau}\right)^2,$$

$$^{(\mathrm{G,Z})}b^2 = -\frac{1}{2}g^{2a}\, g_{44,a}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}^4}{\mathrm{d}\tau}\right)^2, \qquad ^{(\mathrm{G,Z})}b^3 = 0 \quad (107)$$

und daraus in nichtrelativistischer Näherung

$$^{(\mathrm{G,Z})}b^1 = -\omega^2 x, \qquad ^{(\mathrm{G,Z})}b^2 = -\omega^2 y, \qquad ^{(\mathrm{G,Z})}b^3 = 0. \qquad (108)$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit der nichtrelativistischen Kinematik, so erkennen wir, daß es sich dabei genau um die Zentripetalbeschleunigung handelt. Da unseren Betrachtungen ein ebener Raum zugrunde gelegt war, können wir keine Gravitationsbeschleunigung erwarten. An geeigneter Stelle werden wir uns mit den Verhältnissen in einem gekrümmten Raum beschäftigen.

Der Coriolis-Beschleunigung und der Zentripetal-Gravitations-Beschleunigung können wir die konkretere Gestalt

$$^{(\mathrm{C})}b^a = \left[g^{ac}(g_{44}\,g_{cb,4} - g_{4b}\,g_{4c,4}) - g^{a\mu}\,g_{4b}\,g_{4\mu,4}\right.$$
$$\left. + g^{ac}\,(g_{44})^2\left\{\left(\frac{g_{4c}}{g_{44}}\right)_{,b} - \left(\frac{g_{4b}}{g_{44}}\right)_{,c}\right\}\right] \qquad (109)$$
$$\cdot\ \frac{c}{2\,g_{44}\sqrt{-g_{44}}}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}\tau}$$

und

$$^{(\mathrm{G,Z})}b^a = -\left[g^{ac}\,(g_{4c,4} - g_{44,c}) + g^{a\mu}\,g_{4\mu,4}\right]\frac{c^2}{2g_{44}}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \qquad (110)$$

geben.

Ein Bezugssystem, in welchem

$$\left\{ {a \atop 4b} \right\} = \frac{g_{4b}}{g_{44}}\left\{ {a \atop 44} \right\}, \quad \text{d. h.} \quad ^{(\mathrm{C})}b^a = 0$$

ist, nennen wir coriolisfrei. Ein Bezugssystem, in welchem

$$\left\{{a \atop 44}\right\} = 0, \quad \text{d. h.} \quad {}^{(G,Z)}b^a = 0$$

ist, bezeichnen wir als gravitations-zentripetalfrei.

§ 12. Dreidimensionale Fassung der räumlichen Bewegungsgleichung und energetische Betrachtungen

Bei Verwendung der Abkürzung

$$ {}^{(C)}Z^a = m_0 \, {}^{(C)}b^a \frac{d\tau}{dt} \sqrt{-g_{44}} \tag{111}$$

für die 3-dimensionale Coriolis-Kraft, der Abkürzung

$$ {}^{(G,Z)}Z^a = m_0 {}^{(G,Z)}b^a \frac{d\tau}{dt} \sqrt{-g_{44}} \tag{112}$$

für die 3-dimensionale Gravitations-Zentripetalkraft, der Abkürzung

$$ {}^{(elm)}K^a = \frac{e}{c} B^a{}_\sigma \frac{dx^\sigma}{d\tau} \sqrt{-g_{44}} \tag{113}$$

für die 3-dimensionale elektromagnetische Kraft und der Abkürzung

$$ m = m_0 \frac{dt}{d\tau} \sqrt{-g_{44}} = \frac{m_0 \sqrt{-g_{44}}}{\sqrt{1-c^{-2}(d\mathfrak{r}/dt)^2}} \tag{114}$$

für die Impulsmasse, nimmt die Bewegungsgleichung die Gestalt

$$\left(m \frac{d\bar{x}^a}{d\tau}\right)_{\llcorner\mu} \frac{d\bar{x}^\mu}{d\tau} + {}^{(C)}Z^a + {}^{(G,Z)}Z^a = {}^{(elm)}K^a \tag{115}$$

an.

Man beachte, daß die quergestrichenen Koordinaten nur in dem Fall, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\left(\frac{g_{4\mu}}{g_{44}}\right)_{,\nu} - \left(\frac{g_{4\nu}}{g_{44}}\right)_{,\mu} = 0 \tag{116}$$

erfüllt ist, global bei der Integration verwendet werden können. Demgegenüber läßt sich aber die Zeit t als Parameter in der Bewegungsgleichung benutzen, auch wenn die dafür gültige Integrabilitätsbedingung

$$\left(\frac{g_{4\mu}}{\sqrt{-g_{44}}}\right)_{,\nu} - \left(\frac{g_{4\nu}}{\sqrt{-g_{44}}}\right)_{,\mu} = g_{\mu,\nu} - g_{\nu,\mu} = 0 \,. \tag{117}$$

die die Einführung eines globalen Zeitfeldes gestattet, nicht erfüllt ist, denn der freie Parameter in der Bewegungsgleichung kann speziell diesem t gesetzt werden.

Um energetische Untersuchungen durchführen zu können, führen wir die Abkürzungen

$$d\bar{x}_b = d\bar{x}^a g_{ab}\,, \quad {}^{(C)}Z_b = {}^{(C)}Z^a g_{ab}\,,$$
$${}^{(G,Z)}Z_b = {}^{(G,Z)}Z^a g_{ab}\,, \quad {}^{(elm)}K_b = {}^{(elm)}K^a g_{ab} \tag{118}$$

ein. Sodann multiplizieren wir die Bewegungsgleichung mit $d\bar{x}_a/dt$ durch und bekommen bei Beachtung der Identitäten

$$\text{a)} \quad \left(\frac{dt}{d\tau}\frac{d\bar{x}_a}{dt}\right)_{\llcorner\mu} \frac{d\bar{x}^\mu}{dt}\frac{d\bar{x}^a}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)^2, \tag{119}$$

$$\text{b)} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{1}{1-c^{-2}(d\mathfrak{r}/dt)^2}\,\frac{1}{2c^2}\frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)^2,$$

aus welchen die Gleichung

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\frac{d\bar{x}_a}{dt}\right)_{\llcorner\mu} \frac{d\bar{x}^\mu}{dt}\frac{d\bar{x}^a}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}c^2\right) \tag{120}$$

folgt, die Energiebilanzgleichung

$$d(m c^2) = ({}^{(elm)}K_a - {}^{(G,Z)}Z_a - {}^{(C)}Z_a)\, d\bar{x}^a + m c^2 \, d \ln \sqrt{-g_{44}}\,.$$

Im allgemeinen Fall sind die elektromagnetischen, gravitationellen, zentripetalen und Coriolis-Kräfte nicht konservativ, so daß in einem beliebigen Bezugssystem aus der Energiebilanzgleichung keine Energieerhaltungsgleichung hervorgeht. Energieerhaltung existiert, wenn das Differential

$$dF = d^{(dyn)}V + d^{(elm)}V \tag{121}$$

mit

$$\text{a)} \quad d^{(dyn)}V = m_0 c \left\{{c \atop 4\mu}\right\} \frac{dx^\mu}{d\tau} g_{ca}\, dx^a - m c^2 \, d\ln\sqrt{-g_{44}}\,, \tag{122}$$

$$\text{b)} \quad d^{(elm)}V = -\frac{e}{c} g_{ab} B^b{}_\mu \frac{dx^\mu}{dt} dx^a \sqrt{-g_{44}} = -e B_{a4}\, dx^a$$

vollständig ist. Nach einiger Umformung erhalten wir daraus

$$d^{(dyn)}V = \left[\frac{m_0 c}{2} g_{ab,4} \frac{dx^b}{d\tau} + m_0 c\, g_{4a,4} \frac{dx^4}{d\tau}\right] dx^a + \frac{m_0 c}{2} g_{44,4} \frac{dx^4}{d\tau} dx^4 \tag{123}$$

und

$$d^{(elm)}V = -e B_{a4}\, dx^a\,. \tag{124}$$

Wir können aus der letzten Gleichung den Schluß ziehen, daß das elektromagnetische Feld konservativ ist, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$B_{a4,b} - B_{b4,a} = 0 \tag{125}$$

erfüllt ist.

Da für Integrabilitätsbetrachtungen die bei den Koordinatendifferentialen auftretenden Koeffizienten Funktionen von Raum und Zeit sein müssen, erkennen wir, daß das metrische Feld im allgemeinen nicht konservativ ist. Lediglich in dem Fall eines statischen metrischen Feldes ($g_{\mu\nu,4}=0$) existiert Energieerhaltung:

$$\mathrm{d}(m\,c^2 + {}^{(\mathrm{elm})}V) = 0,$$

$$\frac{m_0\,\sqrt{-g_{44}}}{\sqrt{1-c^{-2}(\mathrm{d}\mathfrak{r}/\mathrm{d}t)^2}} + {}^{(\mathrm{elm})}V = \mathrm{const}\,. \qquad (126)$$

Die bisherigen energetischen Betrachtungen basieren auf der räumlichen Bewegungsgleichung. Die zeitliche Bewegungsgleichung liefert aber, wie eine eingehende Untersuchung zeigt, dieselben Aussagen.

Herrn N. SALIÉ danke ich für interessante Diskussionen.

Reaktionswärmeleitfähigkeit von Wasserstoff und einfach ionisiertem Helium in einer zylindersymmetrischen Entladung mit überlagertem axialem Magnetfeld*

Von R. WIENECKE

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

(Z. Naturforschg. **19 a**, 675—679 [1964]; eingegangen am 15. Februar 1964)

Für die Übergänge vom neutralen zum ionisierten Wasserstoff und vom neutralen zum einfach ionisierten Helium wird die Reaktionswärmeleitfähigkeit in einer zylindersymmetrischen Entladung mit überlagertem axialen Magnetfeld berechnet. Berücksichtigt werden muß dabei der radiale Druckgradient, der sich infolge der Diffusion von Ladungsträgern quer zum Magnetfeld ausbildet und in einer früheren Arbeit berechnet worden ist. Die Rechnungen zeigen, daß auch die zur Kontaktleitfähigkeit zu addierende Reaktionswärmeleitfähigkeit durch das Magnetfeld relativ stark beeinflußt wird.

Maschinell berechnete Kurven der Reaktionswärmeleitfähigkeit werden für verschiedene Werte für die magnetische Induktion und den außerhalb der Leitfähigkeitszone vorhandenen Gasdruck wiedergegeben.

In einer zylindersymmetrischen Lichtbogensäule wird unter normalen Bedingungen die dem Plasma zugeführte elektrische Energie ganz überwiegend durch Wärmeleitung in radialer Richtung abgeführt. Hierbei spielt neben der auf der Molekularbewegung beruhenden normalen Wärmeleitfähigkeit die Reaktionswärmeleitfähigkeit eine wichtige Rolle. Sie kommt dadurch zustande, daß die in radialer Richtung sich ausbildenden stationären Diffusionsströme von Elektronen und Ionen nach außen und von neutralen Gasatomen nach innen mit einem Enthalpiestrom verbunden sind. So tragen insbesondere die nach außen diffundierenden Ionen die Ionisierungsenergie des Mutteratoms als potentielle Energie mit sich, die sie bei der Rekombination in kälteren Gebieten in Freiheit setzen, während umgekehrt die nach innen diffundierenden Atome bei ihrer Ionisation dem Plasma mindestens die Ionisierungsenergie entziehen. (Die gleichen Überlegungen gelten naturgemäß auch für das Gebiet der Mehrfachionisation bzw. der Dissoziation.) Bezeichnet man mit $\mathfrak{v}_e$, $\mathfrak{v}_i$, $\mathfrak{v}_0$ die Strömungsgeschwindigkeiten von Elektronen, Ionen und Neutralteilchen und mit h_e, h_i, h_0 die Enthalpien pro Gramm der einzelnen Komponenten, so läßt sich der Energiestrom durch Transport von Reaktionsenergie schreiben:

$$\mathfrak{W}_R = \sum_j p_j\,h_j\,\mathfrak{v}_j = -\varkappa_R \cdot \operatorname{grad} T\,, \quad j = \mathrm{e, i, 0}. \qquad (1)$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß sich das Gesamtplasma in Ruhe befindet, die Schwerpunktgeschwindigkeit $\mathfrak{V}$ identisch verschwindet. In Analogie zur normalen Kontaktwärmeleitfähigkeit $\varkappa_K$ nennt man $\varkappa_R$ die Reaktionswärmeleitfähigkeit.

Für den Gesamtenergiestrom gilt dann:

$$\mathfrak{W}_G = -\varkappa_G \cdot \operatorname{grad} T = -(\varkappa_K + \varkappa_R) \cdot \operatorname{grad} T. \qquad (2)$$

Überlagert man der Säule des Lichtbogens ein achsenparalleles Magnetfeld, so wird, wie in einer vor-

* Diese Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.